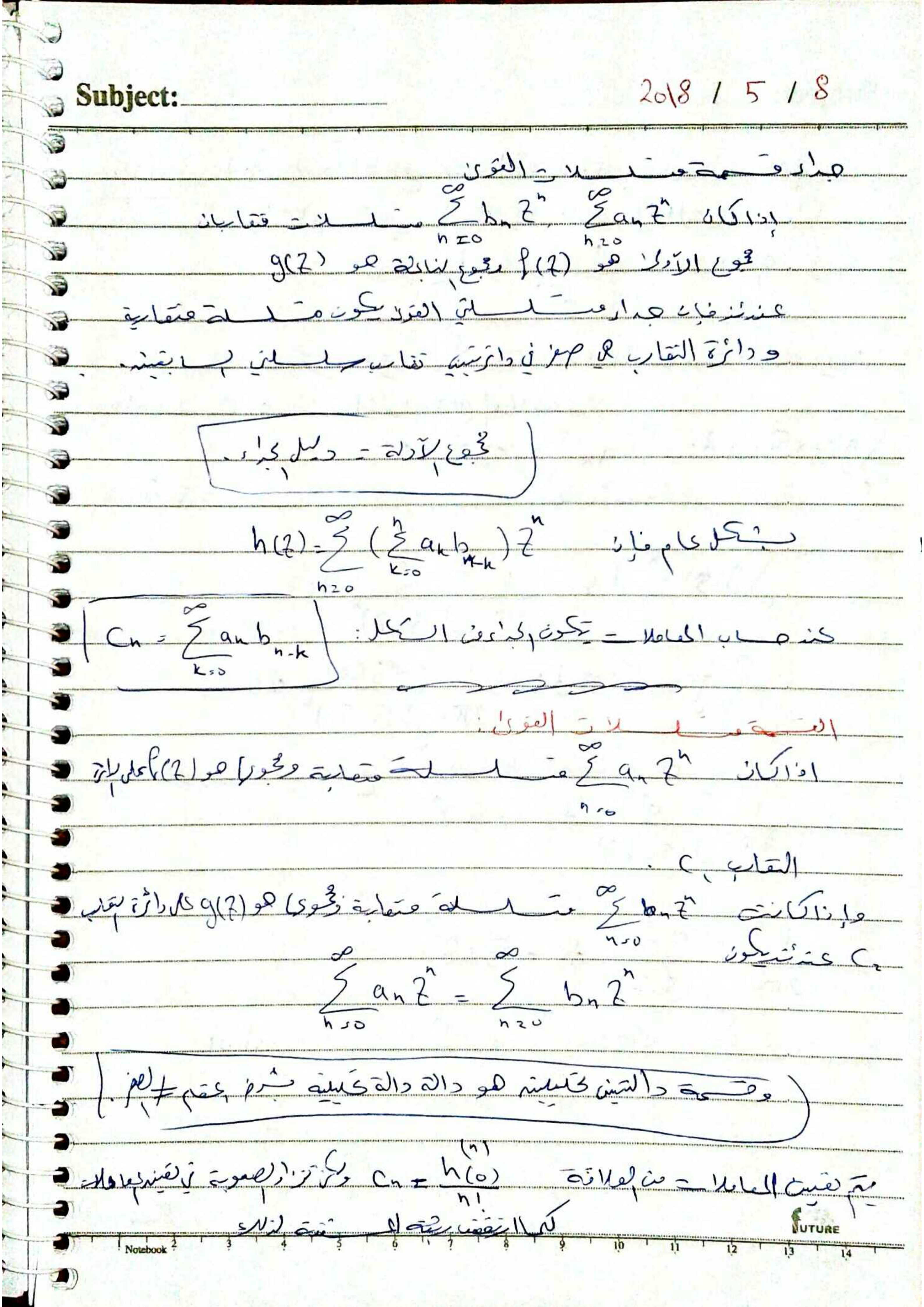


Subject: 2018 / 5 / 8

جداء وقسمة متسلسلات القوى

إذا كان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ متسلسلات متقاربان

مجموع الأولى هو $f(z)$ ومجموع الثانية هو $g(z)$

عندئذٍ فإن جداء متسلسلتي القوى يكون متسلسلة متقاربة

ودائرة التقارب R هي أصغر دائرتي تقارب متسلسلتين السابقتين.

مجموع الجداء = جداء المجموع.

بشكل عام فإن $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$

لحساب المعاملات يكون بأخذ الشكل: $C_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_n b_{n-k}$

المتسلسلات القوى:

إذا كان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متسلسلة متقاربة ومجموعها هو $f(z)$ داخل دائرة

التقارب C.

وإذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ متسلسلة متقاربة ومجموعها هو $g(z)$ داخل دائرة التقارب C_2 عندئذٍ يكون

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

وقسمة دالتين تحليليتين هو دالة تحليلية بشرط المقام ≠ الصفر.

يتم تعيين المعاملات من العلاقة $C_n = \frac{h^{(n)}(0)}{n!}$ ولكن تزداد الصعوبة في تعيين المعاملات

كلما ارتفعت رتبة المشتقة لذلك

Notebook FUTURE

Subject: / /

يمكن تعيين C_n من خلال التسلسلات بحيث أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

ومن هذه المساواة نستنتج أن $a_0 = b_0 c_0 \Rightarrow \boxed{c_0 = \frac{a_0}{b_0}}$

$$a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1$$

ومن هنا العلاقة يتم تعيين c_1

$$a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2$$

ومن هذه العلاقة يتم تعيين c_2 .

$$a_3 = b_3 c_0 + b_2 c_1 + b_1 c_2 + b_0 c_3$$

ومن هذه العلاقة يتم تعيين c_3 .

مثال أوجد منشور الدالة $f(z) = \frac{e^z}{1-z}$ $|z|<1$
وضمن نطاق تقارب الجدول ذات قيمة

الآن لنوجد النشر بطريقة جداء القسمة،

الطريقة الأولى: يمكن إيجاد النشر بالاعتماد على جداء المتسلسلات.

$$f(z) = e^z \frac{1}{1-z}$$

$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$ $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 1$

$$f(z) = \left(1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{4!} z^4 + \dots\right)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad , \quad c_0 = a_0 b_0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 + 1 = 2$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1 + 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

Notebook FUTURE

Subject: / /

$C_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 1.1 + 1.1 + \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{3}(1)$
$= \frac{16}{6}$

$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots$

إذن: $f(z) = 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{16}{6}z^3 + \ldots$

الآن من خلال القسمة:

$f(z) = \frac{e^z}{1-z} = \frac{1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \ldots}{1-z}$

الآن نستخرج $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ، $b_0, b_1, \ldots$

$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}$

$b_0 = 1, b_1 = -1, b_2 = 0, b_3 = 0 \ldots$

وبالتالي فإنه

$a_0 = b_0 c_0 = 1 = 1 c_0 \Rightarrow c_0 = 1$

$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \Rightarrow 1 = 1 c_1 - 1 \Rightarrow c_1 = 2$

$a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \Rightarrow c_2 = \frac{5}{2}$

$a_3 = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0 \Rightarrow c_3 = \frac{16}{6}$

أصفار الدالة تحليلية:

مجال قبل الفترة.

Subject: / /

أوجد منشور $f(z) = \frac{e^z - 1}{1 - z^2}$ باستخدام قسمة المتسلسلات: $|z|<1$

الحل

$$f(z) = \frac{z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots + \frac{1}{n!}z^n + \dots}{1 - z^2}$$

$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{6}$

$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = b_4 = 0 \dots 0$

$a_0 = b_0 c_0 \Rightarrow \boxed{c_0 = 0}$

$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \Rightarrow 1 = c_1 + 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 1}$

$a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0$

$\frac{1}{2} = c_2 + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{2}}$

$a_3 = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0$

$\frac{1}{6} = c_3 + 0 + (-1) + 0 \Rightarrow \boxed{c_3 = \frac{7}{6}}$

مبرهنة: أصفار الدالة التحليلية: لتكن $f(z)$ دالة تحليلية في النطاق D ولتكن z_0 نقطة من نقاط هذا النطاق. لتكن C_1 دائرة تقع في داخلية هذا النطاق عندئذٍ يكون منشور تايلور في هذه الدالة من الشكل:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} + \frac{f''(z_0)}{2!} + \dots$$

Subject: / /

لنفرض أن z_0 في صفر للدالة f عندئذ $f(z_0)=0$.

وإذا كان

$$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=____=f^{n}(z_n)=0$$

عندئذ تكون النقاط z_0 في صفر من الدرجة m للدالة f وفي هذه الحالة يكون للدالة النشر الآتي

$$f(z)=\frac{f^{m}(z)}{m!}(z-z_0)^{m}+\frac{f^{m+1}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1}+___+\frac{f^{n}(z)}{n!}(z-z_0)^{n}+__$$

أي أن

$$f(z)=(z-z_0)^{m}\left[a_m+a_{m+1}(z-z_0)^{1}+a_{m+2}(z-z_0)^{2}+__\right]$$

$$f(z)=(z-z_0)^{m}\sum_{n=0}^{\infty}a_{m+n}(z-z_0)^{n}$$

$$f(z)=(z-z_0)^{m}g(z)$$ ☆

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{m+n}(z-z_0)^{n}$$

حيث

$$a_m=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$$

أثبتنا في المحاضرة السابقة أن مجموع متسلسلة قوى هو دالة تحليلية أي أن $g(z)$ هو دالة تحليلية على دائرة التقارب وبما أنها تحليلية فهي دالة قابلة للاشتقاق وبما أنها قابلة للاشتقاق فهي دالة متصلة ومستمرة. وبما أنها مستمرة هذا يعني من أجل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث أن $|g(z)-g(z_0)|<\varepsilon$ طالما أن $|z-z_0|<\delta$

لنفرض أن $\varepsilon=\frac{|g(z_0)|}{2}$ ولنفرض أنه يقابلها هذا العدد δ_1

FUTURE Notebook

Subject: / /

بحيث أن $|g(z)-g(z_0)| < \frac{|g(z)|}{2}$ طالما أن $|z-z_0| < \delta$

إن الدالة $g(z)$ لا يمكن أن تنعدم عند أي نقطة من نقاط جوار z_0
لإثبات ذلك لنفرض أن $g(z)$ تنعدم عند نقطة من نقاط جوار z_0 يصبح
لدينا مقياس $|0-g(z_0)| < \frac{|g(z_0)|}{2}$ أي أن $|g(z_0)| < \frac{|g(z_0)|}{2}$

وهذا غير ممكن { عدد موجب أصغر من نصفه }.

من العلاقة * ومن أن لا تنعدم كما بينا قبل قليل عند أي نقطة من نقاط جوار
z_0 نستنتج أن الدالة f لا تنعدم إلا عند نقطة z_0 أما عند بقية جوار
z_0 لا تنعدم. وبهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة.

مبرهنة: أصفار الدالة التحليلية هي نقاط معزولة.

درجة الصفر هي رتبة المشتقة التي لا تنعدم.

~~المثال~~ أثبت أن $z=0$ صفر من الرتبة الثانية للدالة $f(z)=e^z-1-z$

$f(0)=e^0-1-0=1-1=0$

$f'(z)=e^z-1 \Rightarrow f'(0)=1-1=0$

$f''(z)=e^z \Rightarrow f''(0)=1 \neq 0$ ومنه نجد $f(z)$ من رتبة ثانية 2.

ملاحظة: إذا كان z_0 موقع صفري للدالة f من درجة k عندئذ يكون الشكل العام للدالة f هو

$f(z)=(z-z_0)^k g(z_0)$; $g(z_0)\neq 0$

Subject: ________ / /

الفصل الثالث النقاط الشاذة وتصنيفها

لتكن f دالة متغير عقدي، اذا كانت f دالة غير قابلة للاشتقاق عند z_0 وقابلة عند بعض نقاط جوار ما للنقطة z_0 عندئذٍ نعد هذه النقطة z_0 نقطة شاذة لهذه الدالة وتصنف هذه الدالة أو النقاط إلى صنفين:

[1] الصنف الأول: نقاط شاذة معزولة: نقول عن النقطة z_0 إنها شاذة معزولة اذا كانت الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند z_0 وقابلة للاشتقاق عند جميع نقاط جوار ما لهذه النقطة.

مثال: إن الدالة $f(z)=\frac{1}{z}$ تملك نقطة شاذة وحيدة فقط في z لأن الدالة f غير معرفة وبالتالي غير مستمرة وبالتالي وبالتالي غير قابلة للاشتقاق أما عند باقي نقاط المستوي العقدي فإن هذه الدالة قابلة للاشتقاق لذلك $z=0$ هي نقطة شاذة معزولة.

$$f(z)=\frac{e^z}{(z-1)(z+3i)}$$

هذه الدالة معرفة عند جميع نقاط المستوي باستثناء $z=1$, $z=-3i$ وبالتالي غير معرفة وبالتالي غير مستمرة فيها وبالتالي غير قابلة للاشتقاق

وكل منهما هي نقطة شاذة معزولة لأنه يوجد لكل منها جوار تكون الدالة f تحليلية عند كل نقطة من نقاط هذا الجوار باستثناء (1) أو (-3i)

الصنف الثاني: نقاط شاذة غير معزولة:

نقول عن النقطة أنها نقطة غير معزولة للدالة f اذا كان كل جوار للنقطة z_0 يحتوي على نقاط شاذة للدالة f.

FUTURE Notebook

Subject: / /

مثال: لتكن لدينا الدالة: $f(z) = \text{Log}\, z$

نعلم بأن النقاط الشاذة لهذه الدالة $x < 0, y = 0$ وبالتالي فإن النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة غير معزولة لأن أي جوار لهذه النقطة سوف يحتوي على نقاط شاذة أخرى لـ f.

مثال: لتكن لدينا الدالة $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}$

النقاط الشاذة التي تعدم المقام، هي جذور المعادلة $\sin \frac{\pi}{z} = 0$

$$\frac{\pi}{z} = n\pi \Rightarrow z = \frac{1}{n}$$

عندما $n = 1 \Leftarrow z = 1$، نلاحظ بأن جميع نقاط معزولة باستثناء $z = 0$

$n = -1 \Leftarrow z = -1$ وشاذة لهذه الدالة

$n = 2 \Leftarrow z = \frac{1}{2}$، باستثناء $z = 0$ عندما $n \to \infty$

$n = -2 \Leftarrow z = -\frac{1}{2}$ فإن نقطة شاذة غير معزولة لأن

أي جوار للنقطة $z = 0$ سوف يحتوي على نقاط شاذة أخرى

النقاط الشاذة الغير المعزولة لا تهمنا

أما المعزولة فتنقسم إلى ثلاثة أنواع.

1) النوع الأول: نقاط شاذة قابلة للإصلاح.

تعريف: نقول عن النقطة z_0 الشاذة المعزولة أنها نقطة قابلة للإصلاح ((قابلة للإزالة)) إذا وفقط إذا كانت نهاية $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ منتهية

FUTURE Notebook

Subject: / /

من هنا نستنتج أن f دالة محدودة في جوار النقطة الشاذة القابلة للإصلاح

مثال: عين النقاط الشاذة للدالة $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$ ثم صنفها.

الحل: النقاط الشاذة أي التي تعدم المقام (أصفار المقام) فإن $z^2 = 0 \Leftarrow z = 0$

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1 - z}{z^2} = \frac{0}{0}$$

نستخدم لوبيتال:

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{2z} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z}{2} = \frac{1}{2}$$

أي أن $z = 0$ هي نقطة قابلة للإصلاح أو الإزالة.

درجة البسط = درجة المقام فهي قابلة للإصلاح.

النوع الثاني: الأقطاب. شرط تكون z_0 شاذة معزولة.

نقول عن هذه الدالة أنها قطب للدالة f إذا وفقط إذا كانت زاوية

f عندما تؤول z ساري مالانهاية ((تبديلها)) ويكون هذا القطب من رتبة m إذا وفقط إذا كانت زاوية $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = B$

$0 \pm B \neq 0$

مثال: لتكن الدالة $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^3}$

Subject: ___________ / /

النقطة الشاذة لهذه الدالة $z=0$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z-1-z}{z^3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{3z^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z}{6z} = \frac{1}{0} = \infty$$

وبالتالي $z=0$ قطب

ورتبته من الرتبة الأولى فهو قطب بسيط.

والقطب من رتبة الثانية ندعوه قطب ثنائي.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$$

نلاحظ أن $z=0$ هي النقطة الشاذة الوحيدة مباشرة.

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{3z^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

إذن $z=0$ قطب رتبته الثانية.

$$\lim_{z\to 0} z^2 \frac{\sin z}{z^3} = \frac{\sin z}{z} = 1$$

العزم العقاربية

إذا $z=0$ قطب من الرتبة الثانية

قطب ثنائي.